# CUPRINS

# Introducere

Prezenta lucrare cu titlul „Metode de investigare pentru sisteme neliniare cu aplicații în fizică" are ca obiectiv central studiul unor ecuaţii diferenţiale neliniare care descriu diferite fenomene din natură. Fenomenologia legată de comportări neliniare este amplă, depăşind cantitativ procesele din natură cu comportament liniar. Comportarea liniară trebuie privită ca o limită sau un caz particular al comportării neliniare.

Studiul fenomenelor neliniare şi al ecuaţiilor de evoluţie care le descriu presupune din punct de vedere matematic rezolvarea mai multor probleme şi găsirea unor răspunsuri la întrebări precum: Este evoluţia fenomenelor neliniare descriptibilă prin ecuaţii diferenţiale? Există posibilitatea de a găsi soluţii pentru aceste ecuaţii, adică sunt ele integrabile? Ce clase de soluţii descriu corect fenomenul şi în ce limită pot să varieze parametrii? Cum pot descrie diferitele soluţii ale ecuaţiilor diferenţiale, regimurile de evoluţie, periodică sau haotică, ale sistemului studiat? Răspunsuri la o parte dintre aceste întrebări au fost căutate pe parcursul acestei investigaţii doctorale, noi propunându-ne să trecem în revistă cele mai adecvate metode care pot fi utilizate în analiza fenomenelor neliniare. Dificultatea principală legată de studiul ecuaţiilor diferenţiale neliniare rezidă în faptul că acestea nu au soluţie generală unică. În funcţie de condiţiile iniţiale sau condiţiile pe frontieră, soluţiile pot să fie total diferite şi nu există un algoritm clar şi general valabil pe care să-l putem utiliza. Mai mult chiar, metodele care se utilizează pentru rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale neliniare cu derivate parţiale (NPDE) nu dau rezultate pentru toate tipurile de ecuaţii trebuind să fie alese convenabil în funcţie de ecuaţiile studiate.

Revenind la prezentul studiu doctoral, acesta îşi propune trei obiective fundamentale:

(i) Prezentarea unor noţiuni de bază legate de descrierea unor sisteme dinamice neliniare: tipuri de ecuaţii neliniare, stabilitatea soluţiilor, puncte de echilibru, orbite periodice, atractori.

(ii) Investigarea unor metode care sunt utilizate pentru stabilirea integrabilităţii sau determinarea unor clase de soluții pentru ecuaţiile diferenţiale integrabile.

(iii) Aplicarea unor metode de rezolvare directă în studiul unor NPDE-uri de interes în fizică şi generarea unor soluţii noi pentru aceste ecuaţii.

Îndeplinirea celor trei obiective am realizat-o pornind în fiecare caz de la ecuaţii concrete şi exemplificând fiecare dintre metodele studiate prin analiza unor modele dinamice neliniare. Aşa se explică de ce aceeaşi ecuaţie este investigată în mai multe secţiuni ale tezei existând de fiecare dată o abordare diferită, din perspectiva metodei investigate.

Corespunzător obiectivelor menţionate, lucrarea este structurată în trei părţi mari, fiecare axându-se pe unul dintre aceste obiective. Astfel, în prima parte a lucrării, „Noţiuni de dinamică neliniară. Ecuaţii diferenţiale neliniare. Tipuri de soluţii", sunt abordate aspecte generale din teoria ecuaţiilor neliniare: tipologia ecuaţiilor diferenţiale liniare, algoritmi de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale liniare, ecuaţii diferenţiale neliniare cu derivate parţiale, soluţii de tip unde solitare, clasificarea solitonilor, exemple de ecuaţii diferenţiale neliniare: ecuaţia Korteweg de Vries (KdV), ecuaţia neliniară Schrodinger (NLS), ecuaţia Burger, ecuaţia de flux Ricci, ecuaţia Benjamin-Bona-Mahony (BBM), ecuaţia Gardner, ecuaţia Fisher, sistemul de ecuaţii Whitman-Broer-Kaup (WBK), ecuaţia Boussinesq, ecuaţia Rosenau-Kawahara-RLW, fiecare ecuaţie fiind însoţită de soluţii.

Partea doua a lucrării, „Metode generale pentru studiul integrabilităţii sistemelor neliniare”, combină caracterul monografic, de enumerare a unor metode de investigare deja cunoscute, cu rezultate originale obţinute în aplicarea acestor metode pe anumite NPDE. Principalele metode investigate în acest capitol sunt: metoda grupurilor de simetrie Lie, metoda biliniarizării a lui Hirota, metoda de împrăştiere inversă combinată cu metoda operatorilor Lax şi procedeul de dressing. În mod concret, am prezentat: metoda simetriilor Lie pentru ecuaţia Burger, pentru sistemul Gierer-Meinhardt şi pentru modelele Kundu-Mukherjee-Naskar (KMN), respectiv Rosenau-Kawahara-RLW (RK-RLW); metoda Hirota pentru ecuaţiile Riccati, Burger, Liouville, Korteweg de Vries şi Schrodinger; metoda de împrăștiere inversă, operatori Lax pentru sistemul Zakharov-Shabat şi procedeul de dressing pentru modelul Kulish-Sklyanin.

A treia parte a lucrării „Metode analitice de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale neliniare”, investighează principalele metode analitice de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale neliniare şi aplicarea acestora. Concret, în această parte a lucrării se prezintă:

- metoda sin-cos aplicată ecuaţiei Rosenau-Kawahara-RLW (RK-RLW) cu diferite forme ale neliniarităţii, obţinând diferite soluţii;
- ecuaţii auxiliare utilizate pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale neliniare cu derivate parţiale;
- metodei tangentei hiperbolice pentru ecuaţiile Burger, Fisher, Boussinesq, Benjamin-Bona-Mahony (BBM), Dodd-Bullough-Mikhailov (DBM);
- rezolvarea unor ecuaţii utilizând ecuaţia auxiliară Riccati şi anume ecuaţiile: Ricci, sine-Gordon, Boussinesq, BBM, DBM;
- metoda G′/G cu exemplificări pentru ecuaţia Burger, ecuaţia neliniară Korteweg de Vries (KdV), ecuaţia de flux Ricci, ecuaţia Gardner;
- metoda fluxului ataşat pentru rezolvarea ecuaţiilor BBM, Gardner, Fisher, Tzitzeica, Boussinesq și sistemului Whitham-Broer-Kaup;
- metoda de dezvoltare exponenţială pentru modelele: Kundu-Mukherjee-Naskar (KMN) şi Drinfel'd-Sokolov-Wilson (DSW);
- metoda de dezvoltare funcţională pentru ecuaţia KdV, modelul KMN, ecuaţia Schrodinger, sistemul DSW.

În final, sunt menţionate rezultatele originale ale autorului, unele concluzii şi perspective de continuare a cercetărilor pe tematica tezei de doctorat. În ceea ce priveşte rezultatele originale, acestea sunt, în principiu, următoarele:

- identificarea grupului de simetrie Lie, pentru modelul KMN şi utilizarea acestui grup pentru obţinerea unor soluţii de similaritate ale modelului;
- pentru acelaşi model a fost aplicată o metodă de investigare nouă şi anume dezvoltarea funcţională a soluţiilor, arătându-se că, utilizând această metodă se pot identifica soluţii mai generale decât cele prezentate anterior în literatură prin alte metode, precum metoda G′/G;
- metoda simetriilor Lie a fost utilizată și pentru sistemul Geirer-Meinhardt, precum și pentru studiul ecuaţiei RK-RLW, o ecuaţie foarte generală care înglobează mai multe ecuaţii importante în