

CUPRINS

INTRODUCERE.....	4
I. NOȚIUNI DE DINAMICĂ NELINIARĂ. ECUAȚII DIFERENȚIALE NELINIARE. TIPURI DE SOLUȚII.....	7
I.1. SISTEME DINAMICE CONTINUE ȘI DISCRETE.....	7
I.1.1. Stabilitate. Puncte de echilibru, orbite periodice.....	9
I.1.2. Atractorii.....	11
I.2. ECUAȚII DIFERENȚIALE NELINIARE. TIPURI DE SOLUȚII.....	12
I.2.1. Ecuatii diferențiale liniare și neliniare.....	12
I.2.2. Algoritm de rezolvarea a ecuațiilor diferențiale liniare de ordin I.....	15
I.3. SOLUȚII DE TIP UNDE SOLITARE. CLASIFICAREA SOLITONILOR.....	16
I.4. EXEMPLE DE ECUAȚII DIFERENȚIALE NELINIARE CU DERIVATE PARȚIALE. SOLUȚII.....	18
I.4.1. Ecuatia Kortevog de Vries.....	18
I.4.2. Ecuatia neliniară Schrodinger.....	19
I.4.3. Ecuatia Burger.....	20
I.4.4. Ecuatia de flux Ricci.....	21
I.4.5. Ecuatia Benjamin-Bona- Mahony.....	21
I.4.6. Ecuatia Gardner.....	23
I.4.7. Ecuatia Fisher.....	23
I.4.8. Sistemul de ecuații Whitham-Broer-Kaup.....	24
I.4.9. Ecuatia Tzitzeica.....	24
I.4.10. Ecuatia Boussinesq.....	25
I.4.11. Ecuatia Rosenau- Kawahara-RLW.....	26
II. METODE GENERALE PENTRU STUDIUL INTEGRABILITĂȚII SISTEMELOR NELINIARE.....	29
II.1. METODA SIMETRIILOR LIE.....	29
II.1.1. Prezentarea metodei.....	29
II.1.2. Metoda simetriilor Lie pentru ecuația Burger.....	32
II.1.3. Metoda simetriilor Lie pentru modelul 2D Kundu-Mukherjee-Naskar.....	34
II.1.3.1. Soluțiile invariante.....	36
II.1.3.2. Soluțiile invariante asociate la $X_7 + \lambda X_5 + \mu X_6 + \gamma X_3$	36
II.1.3.3. Soluții invariante asociate subalgebrei X_4	38
II.1.3.4. Soluții invariante asociate la X_2	39
II.1.3.5. Concluzii.....	40
II.1.4. Analiza de simetrie a sistemului Gierer-Meinhardt.....	41
II.1.5 Analiza de simetrie pentru modelul Rosenau-Kawahara-RLW.....	48

II.2. METODA HIROTA.....	50
II.2.1. Metoda Hirota pentru ecuația Riccati.....	50
II.2.2. Metoda Hirota pentru ecuația Burger.....	51
II.2.3. Metoda Hirota pentru ecuația Liouville.....	51
II.2.4 Metoda Hirota pentru ecuația Korteweg de Vries.....	52
II.2.5. Metoda Hirota pentru ecuația Schrodinger.....	58
II.3. METODA DE ÎMPRĂȘTIERE INVERSĂ. METODA OPERATORILOR LAX.....	59
II.3.1. Metoda de împrăștiere inversă. Generalități.....	59
II.3.1.1. Operatori Lax.....	60
II.3.1.2. Soluții Jost. Soluții analitice fundamentale.....	60
II.3.1.3. Metoda dressing Zakharov – Shabat.....	65
II.3.2. Modelul Kulish - Sklyanin. Proprietățile spectrale ale operatorilor Lax. Soluții soliton. Rezolventul operatorului Lax. Relația de completitudine.....	68
II.3.2.1. Problema de împrăștiere pentru operatorul Lax L	69
II.3.2.2. Metoda dressing Zakharov-Shabat și soluțiile soliton.....	72
II.3.2.3. Efectele îmbrăcării pe soluțiile Jost și matricea de împrăștiere.....	79
II.3.2.4. Rezolventul operatorului Lax L	81
II.3.2.5. Rezolventul operatorilor Lax cu degenerarea J	81
II.3.2.6. Relația de completitudine pentru soluțiile analitice fundamentale a clasei de operatori Lax L	82
III. METODE ANALITICE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE NELINIARE.....	84
III.1. GENERALITĂȚI.....	84
III.2. METODE DE REZOLVARE FĂRĂ UTILIZAREA ECUAȚIILOR AUXILIARE.....	84
III.2.1. Metoda sin-cos.....	84
III.2.2. Metoda tangentei hiperbolice.....	89
III.2.2.1. Descrierea metodei.....	89
III.2.2.2. Aplicarea metodei tangentei hiperbolice pentru ecuația Burger.....	90
III.2.2.3. Aplicarea metodei tangentei hiperbolice pentru ecuația Korteweg de Vries.....	91
III.2.2.4. Aplicarea metodei tangentei hiperbolice pentru ecuația Fisher.....	92
III.2.3. Metoda fluxului atașat.....	93
III.2.3.1. Descrierea metodei.....	93
III.2.3.2. Aplicarea metodei fluxului atașat pentru ecuația Benjamin-Bona-Mahony.....	93
III.2.3.3. Aplicarea metodei fluxului atașat pentru ecuația Gardner.....	95
III.2.3.4. Aplicarea metodei fluxului atașat pentru ecuația Fisher.....	95
III.2.3.5. Aplicarea metodei fluxului atașat pentru sistemul Whitham-Broer-Kaup.....	96
III.2.3.6. Aplicarea metodei fluxului atașat pentru ecuația Tzitzeica.....	97
III.2.3.7. Aplicarea metodei fluxului atașat pentru ecuația Boussinesq.....	97
III.3. REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE NELINIARE CU TEHNICA ECUAȚIEI AUXILIARE.....	99
III.3.1. Ecuații auxiliare.....	99
III.3.2. Exemple de rezolvare a unor ecuații utilizând ecuația auxiliară Riccati.....	103
III.3.2.1 Ecuația Ricci.....	103

III.3.2.2 Ecuția Boussinesq.....	104
III.3.2.3 Ecuția Benjamin-Bona- Mahony.....	105
III.3.2.4 Ecuția Dodd-Bullough- Mikhailov.....	106
III.3.3. Metoda G'/G.....	108
III.3.3.1. Descrierea metodei G'/G.....	108
III.3.3.2. Aplicarea metodei G'/G pentru ecuația Burger.....	109
III.3.3.3. Aplicarea metodei G'/G pentru ecuația Korteweg de Vries.....	110
III.3.3.4. Aplicarea metodei G'/G pentru ecuația de flux Ricci.....	113
III.3.3.5. Aplicarea metodei G'/G pentru ecuația Gardner.....	114
III.3.4. Metoda de dezvoltare exponențială.....	116
III.3.4.1. Generalități despre metodă.....	116
III.3.4.2. Aplicarea metodei de dezvoltare exponențială pentru modelul Kundu-Mukherjee-Naskar.....	116
III.3.4.3. Aplicarea metodei de dezvoltare exponențială pentru modelul Drinfel'd-Sokolov-Wilson.....	120
III.3.5. Metoda de dezvoltare funcțională.....	127
III.3.5.1. Descrierea metodei.....	127
III.3.5.2. Aplicarea metodei de dezvoltare funcțională pentru ecuația Korteweg de Vries.....	128
III.3.5.3. Aplicarea metodei de dezvoltare funcțională pentru modelul Kundu-Mukherjee-Naskar.....	137
III.3.5.4. Aplicarea metodei de dezvoltare funcțională pentru ecuația Schrodinger.....	141
III.3.5.5. Aplicarea metodei de dezvoltare funcțională pentru modelul Drinfel'd-Sokolov-Wilson.....	143
CONCLUZII.....	149
PERSPECTIVE DE CONTINUARE A CERCETĂRILOR PE TEMATICA TEZEI DE DOCTORAT.....	151
BIBLIOGRAFIE.....	152
A. BIBLIOGRAFIE CITATĂ.....	152
B. BIBLIOGRAFIE SUPLIMENTARĂ CONSULTATĂ.....	159
LISTA LUCRĂRILOR PUBLICATE ȘI COMUNICATE DE AUTOAREA TEZEI DE DOCTORAT.....	161
A. LUCRĂRI PUBLICATE ÎN REVISTE ISI.....	161
B. LUCRĂRI PUBLICATE ÎN REVISTE ȘI PROCEEDINGS-URI INDEXATE ÎN BAZE DE DATE.....	161
C. LUCRĂRI COMUNICATE LA CONFERINȚE INTERNAȚIONALE.....	161

Introducere

Prezenta lucrare cu titlul „Metode de investigare pentru sisteme neliniare cu aplicații în fizică” are ca obiectiv central studiul unor ecuații diferențiale neliniare care descriu diferite fenomene din natură. Fenomenologia legată de comportări neliniare este amplă, depășind cantitativ procesele din natură cu comportament liniar. Comportarea liniară trebuie privită ca o limită sau un caz particular al comportării neliniare.

Studiul fenomenelor neliniare și al ecuațiilor de evoluție care le descriu presupune din punct de vedere matematic rezolvarea mai multor probleme și găsirea unor răspunsuri la întrebări precum: Este evoluția fenomenelor neliniare descriabilă prin ecuații diferențiale? Există posibilitatea de a găsi soluții pentru aceste ecuații, adică sunt ele integrabile? Ce clase de soluții descriu corect fenomenul și în ce limită pot să varieze parametrii? Cum pot descrie diferitele soluții ale ecuațiilor diferențiale, regimurile de evoluție, periodică sau haotică, ale sistemului studiat? Răspunsuri la o parte dintre aceste întrebări au fost căutate pe parcursul acestei investigații doctorale, noi propunându-ne să trecem în revistă cele mai adecvate metode care pot fi utilizate în analiza fenomenelor neliniare. Dificultatea principală legată de studiul ecuațiilor diferențiale neliniare rezidă în faptul că acestea nu au soluție generală unică. În funcție de condițiile inițiale sau condițiile pe frontieră, soluțiile pot să fie total diferite și nu există un algoritm clar și general valabil pe care să-l putem utiliza. Mai mult chiar, metodele care se utilizează pentru rezolvarea unor ecuații diferențiale neliniare cu derivate parțiale (NPDE) nu dau rezultate pentru toate tipurile de ecuații trebuind să fie alese convenabil în funcție de ecuațiile studiate.

Revenind la prezentul studiu doctoral, acesta își propune trei obiective fundamentale:

(i) Prezentarea unor noțiuni de bază legate de descrierea unor sisteme dinamice neliniare: tipuri de ecuații neliniare, stabilitatea soluțiilor, puncte de echilibru, orbite periodice, atractori.

(ii) Investigarea unor metode care sunt utilizate pentru stabilirea integrabilității sau determinarea unor clase de soluții pentru ecuațiile diferențiale integrabile.

(iii) Aplicarea unor metode de rezolvare directă în studiul unor NPDE-uri de interes în fizică și generarea unor soluții noi pentru aceste ecuații.

Îndeplinirea celor trei obiective am realizat-o pornind în fiecare caz de la ecuații concrete și exemplificând fiecare dintre metodele studiate prin analiza unor modele dinamice neliniare. Așa se explică de ce aceeași ecuație este investigată în mai multe secțiuni ale tezei existând de fiecare dată o abordare diferită, din perspectiva metodei investigate.

Corespunzător obiectivelor menționate, lucrarea este structurată în trei părți mari, fiecare axându-se pe unul dintre aceste obiective. Astfel, în prima parte a lucrării, „Noțiuni de dinamică neliniară. Ecuații diferențiale neliniare. Tipuri de soluții”, sunt abordate aspecte generale din teoria ecuațiilor neliniare: tipologia ecuațiilor diferențiale liniare, algoritmi de rezolvare a ecuațiilor diferențiale liniare, ecuații diferențiale neliniare cu derivate parțiale, soluții de tip unde solitare, clasificarea solitonilor, exemple de ecuații diferențiale neliniare: ecuația Korteweg de Vries (KdV),

ecuația neliniară Schrodinger (NLS), ecuația Burger, ecuația de flux Ricci, ecuația Benjamin-Bona-Mahony (BBM), ecuația Gardner, ecuația Fisher, sistemul de ecuații Whitman-Broer-Kaup (WBK), ecuația Boussinesq, ecuația Rosenau-Kawahara-RLW, fiecare ecuație fiind însoțită de soluții.

Partea doua a lucrării, „Metode generale pentru studiul integrabilității sistemelor neliniare”, combină caracterul monografic, de enumerare a unor metode de investigare deja cunoscute, cu rezultate originale obținute în aplicarea acestor metode pe anumite NPDE. Principalele metode investigate în acest capitol sunt: metoda grupurilor de simetrie Lie, metoda biliniarizării a lui Hirota, metoda de împrăștiere inversă combinată cu metoda operatorilor Lax și procedeul de dressing. În mod concret, am prezentat: metoda simetriilor Lie pentru ecuația Burger, pentru sistemul Gierer-Meinhardt și pentru modelele Kundu-Mukherjee-Naskar (KMN), respectiv Rosenau-Kawahara-RLW (RK-RLW); metoda Hirota pentru ecuațiile Riccati, Burger, Liouville, Korteweg de Vries și Schrodinger; metoda de împrăștiere inversă, operatori Lax pentru sistemul Zakharov-Shabat și procedeul de dressing pentru modelul Kulish-Sklyanin.

A treia parte a lucrării „Metode analitice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale neliniare”, investighează principalele metode analitice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale neliniare și aplicarea acestora. Concret, în această parte a lucrării se prezintă:

- metoda sin-cos aplicată ecuației Rosenau-Kawahara-RLW (RK-RLW) cu diferite forme ale neliniarității, obținând diferite soluții;
- ecuații auxiliare utilizate pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale neliniare cu derivate parțiale;
- metodei tangentei hiperbolice pentru ecuațiile Burger, Fisher, Boussinesq, Benjamin-Bona-Mahony (BBM), Dodd-Bullough-Mikhailov (DBM);
- rezolvarea unor ecuații utilizând ecuația auxiliară Riccati și anume ecuațiile: Ricci, sine-Gordon, Boussinesq, BBM, DBM;
- metoda G'/G cu exemplificări pentru ecuația Burger, ecuația neliniară Korteweg de Vries (KdV), ecuația de flux Ricci, ecuația Gardner;
- metoda fluxului atașat pentru rezolvarea ecuațiilor BBM, Gardner, Fisher, Tzitzeica, Boussinesq și sistemului Whitham-Broer-Kaup;
- metoda de dezvoltare exponențială pentru modelele: Kundu-Mukherjee-Naskar (KMN) și Drinfel'd-Sokolov-Wilson (DSW);
- metoda de dezvoltare funcțională pentru ecuația KdV, modelul KMN, ecuația Schrodinger, sistemul DSW.

În final, sunt menționate rezultatele originale ale autorului, unele concluzii și perspective de continuare a cercetărilor pe tematica tezei de doctorat. În ceea ce privește rezultatele originale, acestea sunt, în principiu, următoarele:

- identificarea grupului de simetrie Lie, pentru modelul KMN și utilizarea acestui grup pentru obținerea unor soluții de similaritate ale modelului;
- pentru același model a fost aplicată o metodă de investigare nouă și anume dezvoltarea funcțională a soluțiilor, arătându-se că, utilizând această metodă se pot identifica soluții mai generale decât cele prezentate anterior în literatură prin alte metode, precum metoda G'/G ;
- metoda simetriilor Lie a fost utilizată și pentru sistemul Geirer-Meinhardt, precum și pentru studiul ecuației RK-RLW, o ecuație foarte generală care înglobează mai multe ecuații importante în