

PETRESCU Mary-Violeta

CRITERII DE CLASIFICARE BAYESIENE

Craiova
Octombrie, 2025

Copyright © 2025, Autor
Tehnoredactare computerizată: PETRESCU Mary-Violeta
Corectura aparține autorului

Responsabilitatea pentru conținutul lucrării revine în exclusivitate autorului
Studiu științific

Publicat: Octombrie 2025
<http://www.edituraelse.ro/ped/ped.htm>

CRITERII DE CLASIFICARE BAYESIENE

Clasificatorul bayesian naiv este un clasificator clasic, bazat pe teorema lui Bayes fiind des utilizat în rezolvarea problemelor predicției falimentului.

Conform studiilor în care au fost comparați mai mulți algoritmi de clasificare a rezultat faptul că, clasificatorul bayesian naiv are performanțe mult mai bune atunci când este aplicat bazelor mari de date.

Scopul tehnicii Bayes este combinarea informațiilor generate de probabilitățile apriorice, cu informații obținute pe baza unui eșantion extras din baza de date analizată, în scopul obținerii unei probabilități posterioare.

Pentru exemplificarea utilizării probabilităților Bayes considerăm cazul în care sunt date două clase ω_1 și ω_2 pentru care obiectele urmează a fi afectate, probabilitățile apriorice cunoscute pentru fiecare clasă $P(\omega_1)$, respectiv $P(\omega_2)$ și un set de formare cu T obiecte. Dacă din T alegem T_1 obiecte care aparțin clasei ω_1 și T_2 obiecte care aparțin clasei ω_2 , atunci putem spune că:

$$P(\omega_1) \approx \frac{T_1}{T} \quad \text{și} \quad P(\omega_2) \approx \frac{T_2}{T} \quad (1)$$

Densitățile de probabilitate condiționată se cunosc și ne prezintă distribuția pentru fiecare clasă a vectorilor caracteristici. Acestea pot fi estimate din setul de formare și sunt notate cu $p(x|\omega_i), i = 1, 2$.

Se regăsesc și sub numele de funcții de verosimilitate ale claselor ω_i în funcție de x .

Putem calcula probabilitățile condiționate, definite anterior, astfel:

$$P(\omega_i|x) = \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{P(x)} = \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{i=1}^2 p(x|\omega_i)P(\omega_i)} = \frac{p(x|\omega_i)P(\omega_i)}{p(x|\omega_1)P(\omega_1) + p(x|\omega_2)P(\omega_2)} \quad (2)$$

În concluzie, putem formula decizia de clasificare Bayes astfel:

$$\begin{aligned} \text{Dacă } P(\omega_1|x) > P(\omega_2|x), & \text{ x va fi afectat clasei } \omega_1 \\ \text{Dacă } P(\omega_1|x) < P(\omega_2|x), & \text{ x va fi afectat clasei } \omega_2 \\ \text{Dacă } P(\omega_1|x) = P(\omega_2|x), & \text{ x va fi afectat oricărei clase} \end{aligned} \quad (3)$$

Ipotezele de aplicare a tehnicii Bayes asupra clasificării obiectelor sunt:

- mulțimea T de obiecte;
- caracteristicile obiectelor notate cu $x_1, x_2, \dots, x_n$ care pot reprezenta coordonatele într-un spațiu n-dimensional;
- clasificarea obiectelor în K clase $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K$ bazată pe următoarele particularități: $P(\omega_i)$ - probabilitatea apriorică a clasei ω_i ; $p(x|i_\omega)$ - funcția care reprezintă densitatea de probabilitate multidimensională condiționată de clasa ω_i sau legea de probabilitate după care se repartizează vectorul proprietăților obiectelor din clasa ω_i

Considerăm că, $P(\omega_i)$ (probabilitatea apriorică a clasei ω_i) și $p(x|i_\omega)$ (densitatea de probabilitate multidimensională condiționată de clasa ω_i) sunt cunoscute pentru fiecare din cele K clase.

Conform ipotezelor formulate, se va crea un algoritm pentru o problemă de clasificare bazată pe teoria de decizie Bayes. Soluțiile obținute vor afecta obiectele astfel încât probabilitatea clasificării greșite să fie minimă.

În vederea creării algoritmului vor fi definite următoarele:

- funcția de decizie notată $D_{(x)}$ care este definită în spațiul obiectelor, care generează rezultatele (output) cu ajutorul căruia se va lua decizia de afectare a obiectului respectiv, astfel : $D_{(x)} = d_i$ atunci obiectul care este descris de vectorul de proprietăți $x \in$ clasei ω_i ;
- funcția de pierdere notată $L(i_w | k_\omega)$ (numită funcție de cost) care reprezintă pierderea condiționată, în sensul că obiectul $x \in$ clasei ω_k de fapt, iar conform

algoritmului $x \in \text{clasei } \omega_i$, prin urmare pierderea înregistrată de către decizia greșită luată este considerată ca fiind output pentru funcția $L(i_w | k_w)$;

- probabilitatea aposteriori că notată $p(x | i_w)$ care reprezintă probabilitatea ca x să aparțină clasei ω_i cu ajutorul căreia va fi calculată pierderea medie condiționată determinată de clasificarea lui x în clasa ω_i astfel:

$$L(i_w | k_{\omega_j}) = \sum_{i=1}^K L(\omega_j / \omega_i) p(\omega_i / x), \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

- funcția $L(x, \omega_j)$ numită pierdere medie condiționată, fiind corespunzătoare clasificării în clasa ω_j a lui x ;
- identificarea clasei care va obține cea mai mică pierdere medie condiționată va fi realizată prin evaluarea funcției L , prin urmare clasificarea lui x în clasa ω_j se va face conform restricției:

$$L(x, \omega_k) \leq L(x, \omega_i), \quad (\forall) i = 1, 2, \dots, K \quad (5)$$

Se consideră funcția de decizie $d(x)$ cu următoarea formă:

$$d_k(x) = -L(x, \omega_k) \quad (6)$$

Funcția de decizie $d(x)$ se regăsește și sub numele de funcția de clasificare sau funcția discriminant.

Funcția de clasificare $d(x)$ va fi evaluată pentru toate clasele $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$, iar afectarea lui x se va realiza în clasa pentru care obținem valoarea cea mai mare.

Conform teoremei lui Bayes probabilitatea ca evenimentul ω_i să fie considerat ca și cauză de apariție este exprimată de relația:

$$p(\omega_i / x) = \frac{p(x / \omega_i) P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^K p(x / \omega_j) P(\omega_j)} \quad (7)$$

Prin urmare, funcția de clasificare $d_k(x)$ din relația (6) împreună cu relațiile (4) și (7) va deveni:

$$d_k(x) = -\sum_{i=1}^K L(\omega_k/\omega_i) p(\omega_i/x) = -\sum_{i=1}^K L(\omega_k/\omega_i) \frac{p(x/\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^K p(x/\omega_j)P(\omega_j)}, k = 1, 2, \dots, K \quad (8)$$

Deci, putem spune că x va fi clasificat în clasa ω_k dacă și numai dacă este îndeplinit următorul criteriu de clasificare, cunoscut și sub numele de criteriul lui Bayes:

$$-\sum_{i=1}^K L(\omega_k/\omega_i) \frac{p(x/\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^K p(x/\omega_j)P(\omega_j)} \geq -\sum_{i=1}^K L(\omega_j/\omega_i) \frac{p(x/\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^K p(x/\omega_j)P(\omega_j)}, (\forall) j \quad (9)$$

Din relația (6) se observă numitorii membrilor inegalității pot fi considerați ca factori comuni și pot fi eliminați datorită faptului că, nu sunt dependenți de indicele de sumare i , rezultând următoarea formă simplificată a criteriului lui Bayes:

$$-\sum_{i=1}^K L(\omega_k/\omega_i) p(x/\omega_i) P(\omega_i) \geq -\sum_{i=1}^K L(\omega_j/\omega_i) p(x/\omega_i) P(\omega_i), (\forall) j \quad (10)$$

În urma acestor rezultate, funcția de clasificare din relația (5) are următoarea formă:

$$d_k(x) = -\sum_{i=1}^K L(\omega_k/\omega_i) p(x/\omega_i) P(\omega_i), k = 1, 2, \dots, K \quad (11)$$

În cazul în care utilizăm funcția de pierdere $L(\omega_i/\omega_j)$ sub următoarea formă:

$$L(\omega_i/\omega_j) = 1 - \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad (12)$$

Funcția de clasificare rezultată în urma utilizării funcția de pierdere $L(\omega_i/\omega_j)$ definită în relația (12) va fi de forma:

$$d_k(x) = \sum_{i=1}^K (1 - \delta_{ki}) p(x/\omega_i) P(\omega_i), k = 1, 2, \dots, K \quad (13)$$

sau

$$d_k(x) = \sum_{i=1}^K \delta_{ki} p(x/\omega_i) P(\omega_i) - \sum_{i=1}^K p(x/\omega_i) P(\omega_i), k = 1, 2, \dots, K \quad (14)$$

Funcția de clasificare din relația (11) în urma eliminării termenilor din prima suma pentru care $i \neq k$ va avea următoarea formă:

$$d_k(x) = p(x/\omega_k) P(\omega_k) - \sum_{i=1}^K p(x/\omega_i) P(\omega_i), k = 1, 2, \dots, K \quad (15)$$

Repetând același procedeu pentru criteriul de clasificare vom obține:

$$-p(x/\omega_k) P(\omega_k) + \sum_{i=1}^K p(x/\omega_i) P(\omega_i) \leq -p(x/\omega_j) P(\omega_j) + \sum_{i=1}^K p(x/\omega_i) P(\omega_i), (\forall) j \quad (16)$$

sau

$$-p(x/\omega_k) P(\omega_k) \leq -p(x/\omega_j) P(\omega_j), (\forall) j \quad (17)$$

În continuare, dacă presupunem că densitățile de probabilitate pentru fiecare clasă sunt normale în raport cu vectorul mediilor și matricea de covarianță ca în relația:

$$p(x/\omega_i) P(\omega_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |\Sigma_i|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu^{(i)})^t \Sigma_i^{-1} (x-\mu^{(i)})}, i = 1, 2, \dots, K \quad (18)$$

Utilizând formula din relația (15) criteriul de clasificare va avea forma următoare:

$$-P(\omega_k) \frac{I}{\sqrt{2\pi} |\Sigma_k|^{1/2}} e^{-\frac{I}{2} (x-\mu^{(k)})^t \Sigma_k^{-1} (x-\mu^{(k)})} \leq -P(\omega_j) \frac{I}{\sqrt{2\pi} |\Sigma_j|^{1/2}} e^{-\frac{I}{2} (x-\mu^{(j)})^t \Sigma_j^{-1} (x-\mu^{(j)})}, (\forall) j \quad (19)$$

În relația (16) componenta variabilă din primul membru va fi separată și vom obține:

$$e^{\frac{I}{2} \left[(x-\mu^{(k)})^t \Sigma_k^{-1} (x-\mu^{(k)}) - (x-\mu^{(j)})^t \Sigma_j^{-1} (x-\mu^{(j)}) \right]} \geq \frac{P(\omega_j) |\Sigma_k|^{1/2}}{P(\omega_k) |\Sigma_j|^{1/2}}, (\forall) j \quad (20)$$

În relația (17) cei doi membrii din inegalitate vor fi vom logaritmați și după rearanjarea termenilor exponentului din primul membru obținem:

$$\frac{I}{2} \left[(x-\mu^{(k)})^t \Sigma_k^{-1} (x-\mu^{(k)}) - (x-\mu^{(j)})^t \Sigma_j^{-1} (x-\mu^{(j)}) \right] \leq \ln \left(\frac{P(\omega_k)}{P(\omega_j)} \right) + \frac{I}{2} \ln \left(\frac{|\Sigma_j|}{|\Sigma_k|} \right), (\forall) j \quad (21)$$

În cazul în care presupunem că matricile de covarianță ale densitățile de probabilitate ale claselor sunt egale, criteriul de clasificare Bayes are următoarea formă:

$$(\mu^{(k)} - \mu^{(j)})^t \Sigma^{-1} x \geq (\mu^{(k)} + \mu^{(j)})^t \Sigma^{-1} (\mu^{(k)} - \mu^{(j)}) - \ln \left[\frac{P(\omega_k)}{P(\omega_j)} \right] \quad (22)$$

BIBLIOGRAFIE:

- 1.Sarkar, S. & Sriram, R.S.,2001. Bayesian Models , 47(11), pp.1457-1475.
- 2.https://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_probability.
- 3.Ben-Gal I., Bayesian Networks, in Ruggeri F., Faltin F. & Kenett R., Encyclopedia of Statistics in Quality & Reliability, Wiley&Sons (2007).